パラメータを用いた体積

１辺の長さ１の立方体 ABCD-EFGH において、点 P が
辺上を G→H→E の順
に動く。このとき、△ ACP(の周および内部）が通過する部分 K の体積 V を求めよ。

(答) $\dfrac{1}{4}$

xyz 空間において、動点 $P(0,0,(1-s)^2), Q(1,s^2,0)$ がある。変数 s が $|s| \leqq 1$ を満たす実数の範囲を動くとき、線分 PQ が動いてできる曲面を S とし、S と平面 $x=y$ が囲む部分の体積を V とする。
(1) 曲面 S と平面 $\pi_t : x=t(0<t<1)$ との交わりの曲線を $C_t : y=f(z)$ とする。$y=f(z)$ のグラフの概形を yz 平面上に図示せよ。
(2)V の値を求めよ。

(答) $\dfrac{4}{9}$

xyz 空間に点 $\mathrm{P}(t\cos t, t\sin t, 0)$ と $\mathrm{Q}(0,0,t)$ をとる。t が 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとき、△OPQ が描く立体を V とする。ただし O は原点である。
(1)$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたす t を固定する。平面 $z=k$　(k は定数) と△ OPQ 交わるとき、その共通部分は線分になる。その塩分の端点を $(0,0,k), (x(t), y(t), k)$ とするとき、$x(t), y(t)$ を求めよ。
(2)k を定数とするとき、$\dfrac{d}{dt}\{(t-k)^2 \sin 2t\}$ を求めよ。
(3) 平面 $z=k$ と V との共通部分の面積 $A(k)$ を求めよ。
(4)V の体積を求めよ。

(富山医薬大)

(答) (1)$\begin{cases} x(t)=(t-k)\cos t \\ y(t)=(t-k)\sin t \end{cases}$　(2)$2(t-k)\{\sin 2t+(t-k)\cos 2t\}$ (3)$\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{2}-k\right)^3$ (4)$\dfrac{\pi^4}{384}$

１辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH の辺 AB,CG,HE 上を動点 P,Q,R がそれぞれ
AP=CQ=HR
をみたすように動くとき、
(1) 平面 PQR はつねに線分 DF に垂直であることを示せ。
(2) 三角形 PQR の通過範囲の体積を求めよ。

(答) $\dfrac{5}{12}$