2次曲線に関する問題

２次曲線に関するものでよくあるのが２次曲線の性質の証明問題です．まずはこの手の問題から入り，練習で関連した証明問題以外の問題も扱うことにします．
（その１）図形的に証明する
ほとんどの場合，数式で証明できますが，気付けば図形的に証明した方が時間短縮ができることがあります．ただ，入試問題では数式で証明する問題が多いので敢えて例題を取り上げることはしません．
（その２）式で証明する．
入試ではこちらがほとんどで，
　　「〜が一定値であることを証明せよ」
というものが多いです．
$\cdot \dfrac{1}{●} + \dfrac{1}{◆} =$ **一定**
→図形上の任意の点を，$(r\cos\theta, r\sin\theta)$ として極表示しておくのがよい．
· 楕円，双曲線の接線が直交するという状況
→接線を $y = mx + n$ などとおいて楕円，双曲線の式と連立させ，判別式 $D = 0$ を用いて，接戦の傾きの 2 次方程式を作り，解と係数の関係を用いて 2 接線の交点の軌跡を求める．
· 放物線の漸近線との交点
→漸近線を $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ として，2 本の漸近線をまとめて考え，2 次関数の解と係数の関係を用いる．
· 線分 = 線分
→中点が一致することを利用（双曲線に関するものに多い）
（例）一直線上に 4 点 P, Q, R, S があり，$PR = QS$ を示すには，
　　$\boxed{PQ\text{ の中点}} = \boxed{RS\text{ の中点}}$
を言うと証明が少し楽になります．
〜文字のおき方〜
2 次曲線上の任意の点のおき方は様々で，状況に応じて使い分ける必要があります．
· 放物線　$y^2 = 4px$
→ $(pt^2, 2pt)$
· 楕円　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
→パラメータ表示 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$
→極表示 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$
→ (ap, bq), 但し $p^2 + q^2 = 1$
$\left(\begin{array}{l}\text{パラメータ表示は,}(p,q)\text{ とおいたときの}\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1 \\ \text{という条件を,}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\text{ というよく知ってい} \\ \text{る条件におきかえたにすぎない.}\end{array}\right)$
· 双曲線　$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
→パラメータ表示 $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$
→極表示 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$
→ (ap, bq), 但し $p^2 - q^2 = 1$
⋆ 双曲線のパラメータ表示について
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{y^2}{b^2}$
$\Leftrightarrow 1 = \dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{a^2y^2}{b^2x^2}$
$\therefore \begin{cases} \dfrac{a}{x} = \cos\theta \\ \dfrac{ay}{bx} = \sin\theta \end{cases}$　とおける．
よって，$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$

例１

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上に，3 点 P, Q, R を
　　$\angle POQ = \angle QOR = \angle ROP$
となるようにとる．このとき，
　　$\dfrac{1}{OP^2} + \dfrac{1}{OQ^2} + \dfrac{1}{OR^2}$
は一定の値をとることを示せ．ただし，O は原点とする．

$\dfrac{1}{●} + \dfrac{1}{▲}$=1 の形なので，極形式でおくとうまくいきます．
（解）$P(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$ とおくと，
$Q\left(r_2\cos\left(\theta + \dfrac{2}{3}\pi\right), r_2\sin\left(\theta + \dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$,
$R\left(r_3\cos\left(\theta - \dfrac{2}{3}\pi\right), r_3\sin\left(\theta - \dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$
と表せる．
また，
$\dfrac{(r_1\cos\theta)^2}{a^2} + \dfrac{(r_2\sin\theta)^2}{b^2} = 1$ をみたすから，
$\dfrac{1}{r_1^2} = \dfrac{\cos^2\theta}{a^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{b^2}$
同様にして，
$$\frac{1}{r_2^2} = \frac{\cos^2\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)}{a^2} + \frac{\sin^2\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)}{b^2}$$
$$\frac{1}{r_3^2} = \frac{\cos^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)}{a^2} + \frac{\sin^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)}{b^2}$$
よって，
$$\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} + \frac{1}{OR^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$$
$$= \frac{\cos^2\theta + \cos^2\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)}{a^2} + \frac{\sin^2\theta + \sin^2\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + \sin^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)}{b^2}$$
$$= \frac{3 + \cos 2\theta + \cos\left(2\theta + \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(2\theta - \frac{4}{3}\pi\right)}{2a^2}\quad \frac{3 - \sin 2\theta - \sin\left(2\theta + \frac{4}{3}\pi\right) - \sin\left(2\theta - \frac{4}{3}\pi\right)}{2b^2}$$
$$= \frac{3 + \cos 2\theta + 2\cos 2\theta\cos\frac{8}{3}\pi}{2a^2} + \frac{3 - \cos 2\theta - 2\cos 2\theta\cos\frac{8}{3}\theta}{2b^2}$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \text{一定}$$

【1】

(1)xy 平面上の楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上に $OP\perp OQ$ を満たしながら動く 2 点 P,Q がある．このとき $\dfrac{1}{OP^2}+\dfrac{1}{OQ^2}$ は一定であることを示せ．ただし，O は原点とする．

(06 群馬大)

(2) 双曲線 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の 1 点を P とし，原点 O を通り，直線 OP に直交する直線が双曲線 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ と交わる点の一つを Q とする．このとき $\dfrac{1}{OP^2}-\dfrac{1}{OQ^2}$ は点 P の位置によらず一定であることを示せ.

（解答）

(1)$P(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおくと，
$Q\left(R\cos\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right),R\sin\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$
と表せる．P は C 上にあるから，
$\dfrac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1$ より，
$\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}$
同様にして，
$\dfrac{1}{R^2}=\dfrac{\cos^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}{a^2}+\dfrac{\sin^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}{b^2}$
が成り立つ.
従って，
$\dfrac{1}{OP^2}+\dfrac{1}{OQ^2}$
$=\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{R^2}$
$=\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}+\dfrac{\cos^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}{a^2}+\dfrac{\sin^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}{b^2}$
$=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{b^2}$
$=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=$一定

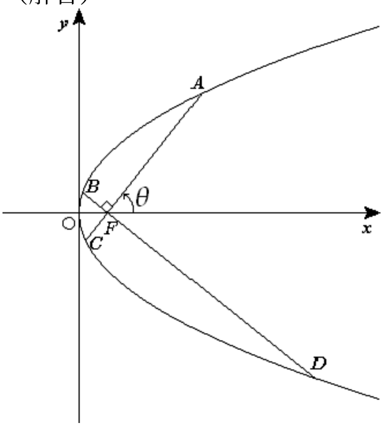
(2)$P(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおくと，
$Q\left(R\cos\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right),R\sin\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$
と表せる．P は C_1 上にあるから，
$\dfrac{r^2\cos^2\theta}{a^2}-\dfrac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1$ より，
$\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}-\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}$ であり，
Q は C_2 上にあるから，
$\dfrac{R^2\cos^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}{a^2}-\dfrac{R^2\sin^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}{b^2}=-1$ より，
$\dfrac{1}{R^2}=-\dfrac{\cos^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}{a^2}+\dfrac{\sin^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}{b^2}$
が成立する.
従って，
$\dfrac{1}{OP^2}-\dfrac{1}{OQ^2}$
$=\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{1}{R^2}$
$=\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}-\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}-\left\{-\dfrac{\cos^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}{a^2}+\dfrac{\sin^2\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)}{b^2}\right\}$
$=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2}-\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{b^2}$
$=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=$一定

【2】
放物線 $y^2=4px(p>0)$ 上に 4 点があり，それらを y 座標の大きい順に A,B,C,D とする．線分 AC と BD は放物線の焦点 F で垂直に交わっている．このとき，$\dfrac{1}{AF\cdot CF}+\dfrac{1}{BF\cdot DF}$ は一定であることを示せ．

(07 名工大 改)

＜考え方＞
焦点からの距離が重要になってきます．つまり，焦点を極とした極座標を考えればよいわけです．このときに，r を θ で表すことになるわけですが，中には焦点を原点に持ってくるように平行移動したりする人もいますが，平行移動はせずに，ベクトルを上手く利用して，$y^2=4px$ に代入しましょう．

（解答）



まず，$F(p,0)$ である．
$\vec{FA}=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおく． ただし，題意を満たす 4 点が存在するためには，

$$\theta\neq n\pi,\theta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi \quad (n\text{ は整数})$$

であるので，これらの下で考える．
$\vec{OA}=\vec{OF}+\vec{FA}=(p+r\cos\theta,r\sin\theta)$ であり，
A は $y^2=4px$ 上だから，

$$r^2\sin^2\theta=4p(p+r\cos\theta)$$
$$r^2\sin^2\theta=4p^2+4pr\cos\theta$$
$$r^2\sin^2\theta-4pr\cos\theta-4p^2=0$$
$$\therefore r=\frac{2p\cos\theta\pm\sqrt{4p^2\cos^2\theta+4p^2\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{2p\cos\pm2p}{\sin^2\theta}$$

$r>0$ より，$r=\dfrac{2p(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

よって，$AF=\dfrac{2p(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

従って，

$$BF=\frac{2p\left\{1+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2p(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$
$$CF=\frac{2p\{1+\cos(\theta+\pi)\}}{\sin^2(\theta+\pi)}=\frac{2p(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$
$$DF=\frac{2p\left\{1+\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)\right\}}{\sin^2\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)}=\frac{2p(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$
$$\therefore\frac{1}{AF\cdot CF}+\frac{1}{BF\cdot DF}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{2p(1+\cos\theta)}\cdot\frac{\sin^2\theta}{2p(1-\cos\theta)}$$
$$+\frac{\cos^2\theta}{2p(1-\sin\theta)}\cdot\frac{\cos^2\theta}{2p(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{1}{4p^2}\cdot\frac{\sin^4\theta}{1-\cos^2\theta}+\frac{1}{4p^2}\cdot\frac{\cos^4\theta}{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{1}{4p^2}\left(\frac{\sin^4\theta}{\sin^2}+\frac{\cos^4\theta}{\cos^2\theta}\right)$$
$$=\frac{1}{4p^2}\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)$$
$$=\frac{1}{4p^2}=\text{一定}$$

【3】

(1) 直交座標において，点 $A(\sqrt{3},0)$ と準線 $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ からの距離の比が $\sqrt{3}:2$ である点 $P(x,y)$ の軌跡を求めよ．

(2)A を通る任意の直線 ℓ と，(1) で求めた曲線との交点を R,Q とする．このとき，$\dfrac{1}{RA}+\dfrac{1}{QA}$ は一定であることを示せ．

＜考え方＞

A は焦点です．焦点からの距離 $\cdots$ 極表示の出番です．(1) を無視して図形的な考察からはじめから極座標表示で方程式をつくることもできますが，図形的な考察が難しい場合もあるので，なるべく計算で求めていくほうが後々のためになります．

（解答）

(1) 直線 $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 上に任意の点 $H\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}},y\right)$ をとると，題意より，

$PA:PH=\sqrt{3}:2$

$2PA=\sqrt{3}PH$

$4PA^2=3PH^2$

$4\left\{(x-\sqrt{3})^2+y^2\right\}=3\left(x-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$

$4(x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2)=3x^2-8\sqrt{3}x+16$

$x^2+4y^2=4$

$\therefore \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

これより，$P(x,y)$ の軌跡は，

　　楕円：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\cdots$①

(2)① 上の任意の点を P とし，$\vec{AP}$ と x 軸の正方向のなす角を θ, $\left|\vec{AP}\right|=r$ とする．

すると，$\vec{AP}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ であり，

　　$\vec{OP}=\vec{OA}+\vec{AP}=(\sqrt{3}+r\cos\theta, r\sin\theta)$

となるから，点 P は ① 上であることより，

$\dfrac{\left(\sqrt{3}+r\cos\theta\right)^2}{4}+r^2\sin^2\theta=1$

$\left(\sqrt{3}+r\cos\theta\right)^2+4r^2\sin^2\theta=4$

$\left(4\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)r^2+2\sqrt{3}r\cos\theta-1=0$

$r=\dfrac{-\sqrt{3}\cos\theta\pm\sqrt{3\cos^2\theta+4\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

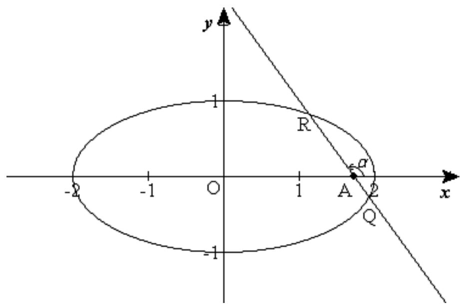
$r=\dfrac{-\sqrt{3}\cos\theta\pm 2}{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$r=\dfrac{-\sqrt{3}\cos\theta\pm 2}{4-3\cos^2\theta}$

$r=\dfrac{-\sqrt{3}\cos\theta\pm 2}{(2-\sqrt{3}\cos\theta)(2+\sqrt{3}\cos\theta)}$

$r>0$ であるから，

$r=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$



$\vec{AR}=(r_1\cos\alpha, r_1\sin\alpha)$ とすれば，

$\vec{AQ}=(r_2\cos(\alpha+\pi), r_2\sin(\alpha+\pi))$ であり，

$r_1=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\alpha}$

$r_2=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos(\alpha+\pi)}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}\cos\alpha}$

であるから，

$\dfrac{1}{AR}+\dfrac{1}{AQ}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}$

$=2+\sqrt{3}\cos\alpha+2-\sqrt{3}\cos\alpha$

$=4$（一定）

補足

　(1) で答えにきちんと楕円と書いていますが書いておいた方が良いです．某高校では「楕円」と書いてなかっただけで 1 点減点されていました．これを受けて，別のテストで「〜の軌跡をあらわす方程式を求めよ」という問いでわざわざ図形の名称まで書いている人がいましたが，こちらは「方程式を求めよ」という問いになっているので式だけで構いません．

【4】

定双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\quad b>0)$$

の１つの焦点 F を通る直線がこの双曲線と交わる点を P, Q とする．

積 $FP\cdot FQ$ の最小値を求めよ．

＜考え方＞

２次曲線で焦点からの距離に絡んだ問題がでたら，焦点を極とした極座標を考えます．極が xy 座標平面の原点と異なるときの極方程式の求め方は記憶しておくと良いでしょう．

（解答）

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ として $F(c,0)$ で考えてよい．

F を通り，方向ベクトルが $(\cos\theta,\sin\theta)$ の直線 ℓ と定双曲線の交点を P, Q とする．

直線 ℓ 上の任意の点を X，$\left|\vec{FX}\right|=r$ とすると，

$\vec{FX}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ であるから，

$\vec{OX}=\vec{OF}+\vec{FX}=(c+r\cos\theta, r\sin\theta)$

となる．X が定双曲線上の点のとき，

$$\frac{(c+r\cos\theta)^2}{a^2}-\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1$$

$$b^2\left(c^2+r^2\cos^2\theta+2cr\cos\theta\right)-a^2r^2\sin^2\theta=a^2b^2$$

$$\left(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta\right)r^2+2b^2cr\cos\theta+b^2c^2-a^2b^2=0$$

$$\left(b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta\right)r^2+2b^2cr\cos\theta+b^4=0\cdots①$$

今，直線?は漸近線と平行でないから，

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\neq\pm\frac{b}{a}\ \therefore b^2\cos^2-a^2\sin^2\theta\neq0$$

r の２次方程式 ① の２解を α, β とすると，

$\left|\vec{FX}\right|=|t(\cos\theta,\sin\theta)|=|t|$

だから，解と係数の関係より，

$$FP\cdot FQ=|\alpha\beta|$$

$$=\left|\frac{b^2\left(c^2-a^2\right)}{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta}\right|$$

$$=\left|\frac{b^4}{-\left(a^2+b^2\right)\sin^2\theta+b^2}\right|$$

$$=\frac{b^4}{\left|-\left(a^2+b^2\right)\sin^2\theta+b^2\right|}$$

そこで，$\left|-\left(a^2+b^2\right)\sin^2\theta+b^2\right|$ の最大値を求める．

$0\leqq\sin^2\theta\leqq1$ だから，

$-\left(a^2+b^2\right)\leqq-\left(a^2+b^2\right)\sin^2\theta\leqq0$

$\therefore -a^2\leqq-\left(a^2+b^2\right)\sin^2\theta+b^2\leqq b^2$

よって求める最小値は，

$$\begin{cases} a\leqq b\ のとき & b^2 \\ a>b\ のとき & \dfrac{b^4}{a^2}\end{cases}$$

$\boxed{注意}$

$\vec{FP}=(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$ として，

$\vec{FQ}=(r_2\cos(\theta+\pi), r_2\sin(\theta+\pi))$

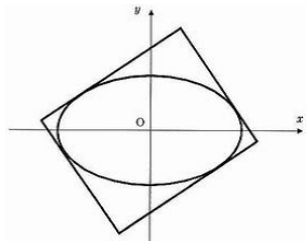
とやってはだめ．双曲線が片腕だけならこれでよいが，本問では両腕で考えなければならない．

【5】

a, b を正の実数とし，xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で 4 点に外接する長方形を考える．

(1) このような長方形の対角線の長さは長方形の取り方によらず一定であることを証明せよ．また対角線の長さを a, b を用いて表せ．

(2) このような長方形の面積の最大値を a, b を用いて表せ．



(98 慶応大)

<考え方>

ある事柄 A を証明するとき，それが直接証明しにくい場合はある事柄 A と同値の「別の事柄 A'」を示すことで，ある事柄 A を証明することがよくあります．本問も実は

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ の直交する 2 接線の交点の軌跡を求めよ．

という基本的な問題と絡めて考えると見通しがよくなります．

（解答）(1) 点 $P(p,q)$ から楕円に直交する 2 接線が引ける条件 $\cdots(*)$ を求める．

(i)$p=\pm a$ のとき

$(*) \Leftrightarrow q=\pm b$

(ii)$p\neq\pm a$ のとき

点 $P(p,q)$ から引いた接線の式は，傾きを m として，

$y=m(x-p)+q\cdots①$

楕円の式に代入して

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\{m(x-p)+q\}^2=1$

$b^2x^2+a^2\left\{m^2(x-p)^2+2m(x-p)q+q^2\right\}=a^2b^2$

$b^2x^2+a^2\left\{m^2\left(x^2-2px+p^2\right)\right.$
$\left.2mqx-2mpq+q^2\right\}=a^2b^2$

$\left(a^2m^2+b^2\right)x^2-2a^2m(mp-q)x$
$+a^2(mp-q)^2-a^2b^2=0$

① が楕円と接するので，

$D_1/4=a^4m^2(mp-q)^2$
$-\left(a^2m^2+b^2\right)\left\{a^2(mp-q)^2-a^2b^2\right\}=0$

$a^4m^2\left(m^2p^2-2mpq+q^2\right)$
$-a^2\left(a^2m^2+b^2\right)\left(m^2p^2-2mpq+q^2\right)$
$+a^2b^2\left(a^2m^2+b^2\right)\ =\ 0$

$a^4p^2m^4-2a^4pqm^3+a^4q^2m^2$
$-a^2\left(a^2p^2m^4-2a^2pqm^3+a^2q^2m^2\right)$
$-a^2\left(b^2p^2m^2-2b^2pqm+b^2q^2\right)$
$+a^4b^2m^2+a^2b^4=0$

$\left(a^4b^2-a^2b^2p^2\right)m^2+2a^2b^2pqm-a^2b^2q^2+a^2b^4=0$

$\left(a^2-p^2\right)m^2+2pqm-q^2+b^2=0\cdots②$

今，$a\neq\pm p$ だから，$a^2-p^2\neq0$ $\therefore$「点 $P(p,q)$ を通り，傾き m の直線が

楕円と接する」$\Leftrightarrow$ ②

$\therefore$ 点 P からの接線は 2 本引けるから，

$D_2/4=p^2q^2-\left(a^2-p^2\right)\left(-q^2+b^2\right)>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}>1\cdots③$

今，その 2 本が直交しているから，

$\boxed{\text{② の 2 解の積}}=-1$

$\therefore$ 解と係数の関係より，

$\dfrac{-q^2+b^2}{a^2-p^2}=-1\Leftrightarrow p^2+q^2=a^2+b^2\cdots④$

③ は ④ に含まれるから，

③ かつ ④ $\Leftrightarrow p^2+q^2=a^2+b^2$

(i)(ii) より，点 P の軌跡は

円　$p^2+q^2=a^2+b^2$

である．

この点 P と原点に関して対称な点を P' とし，P, P' からそれぞれ楕円に直交する 2 接線を引くことで，楕円に外接する長方形が得られる．

また，対角線の長さは

$2\sqrt{a^2+b^2}$

(2) 対角線のなす角を θ とおくと，長方形の面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot4\left(a^2+b^2\right)\sin\theta$

これは $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $2\left(a^2+b^2\right)$ をとる．

（実際に $m=\pm1$ のときこの値をとれる）

【6】

曲線 C を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1 \quad (b>a>0)$ で定義する．
点 $P(u,v)$ から曲線 C に２本の直交する接線が引けるような点 P の軌跡を求め，図示せよ．

(滋賀医科大 改)

＜考え方＞
典型的な問題です．双曲線ですが，楕円のときと同じようなやり方でできます．しかし，除外点があるのでかなり注意が必要です．除外点の議論は易しくはありません．知らなかった人はこれを機に覚えておきましょう．特に意識して記憶すべきところは,「点 P から双曲線 C に２本の直交する接線が引けるための条件」３つと，$m\neq\pm\dfrac{b}{a}$ の処理の仕方です．要するに漸近線上の点が除外されるという結果そのものも知っておくと良いでしょう．

（解答）(1) １本の接線が y 軸方向のときは明らかに不適なので，直線 $y=mx+n$ が双曲線 C と接する条件を考える．
$y=mx+n$ を双曲線 C の式に代入して
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{(mx+n)^2}{b^2}=-1$
$b^2x^2-a^2\left(m^2x^2+2mnx+n^2\right)+a^2b^2=0$
$\left(b^2-a^2m^2\right)x^2-2mna^2x+a^2\left(b^2-n^2\right)=0\cdots①$
$y=mx+n$ が双曲線 C と接するための条件は，① が，２次方程式であり，かつ，重解をもつこと，すなわち,

$$\begin{cases} b^2-a^2m^2\neq 0\cdots② \\ (mna^2)^2-a^2\left(b^2-a^2m^2\right)\left(b^2-n^2\right)=0\cdots③ \end{cases}$$

である。
② より，$m\neq\pm\dfrac{b}{a}$
③ より,
$a^4m^2n^2-a^2\left(b^4-b^2n^2-a^2b^2m^2+a^2m^2n^2\right)=0$
$-a^2b^4+a^2b^2n^2+a^4b^2m^2=0$
$-b^2+n^2+a^2m^2=0\cdots④$
直線 $y=mx+n$ が点 $P(u,v)$ を通るとき,
$v=mu+n$ より，$n=v-mu$ だから ④ に代入して,
$-b^2+(v-mu)^2+a^2m^2=0\cdots⑤$
$\left(a^2+u^2\right)m^2-2uvm+v^2-b^2=0\cdots⑥$
点 P から双曲線 C に２本の直交する接線が引けるための条件は，m の２次方程式 ⑥ が,

$\pm\dfrac{b}{a}$ ではない２実解をもち，２解の積が -1

をみたすことである．すなわち,

$$\begin{cases} -b^2+\left(v\pm\dfrac{b}{a}u\right)^2+a^2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\neq 0 \quad \cdots※ \\ (uv)^2-\left(a^2+u^2\right)\left(v^2-b^2\right)>0 \\ \dfrac{v^2-b^2}{a^2+u^2}=-1 \quad （⑥で解と係数の関係） \end{cases}$$

である.（※は，⑤ に $m\neq\dfrac{b}{a}$ を代入した)

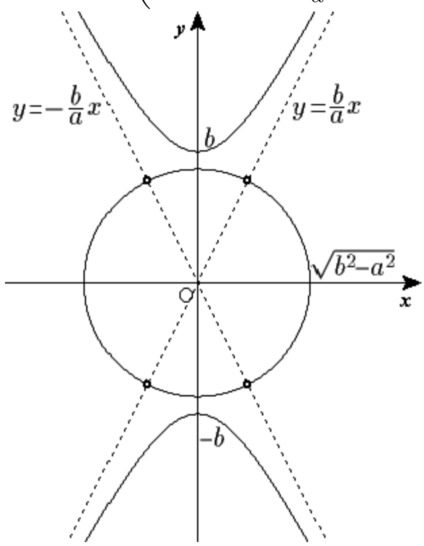
これらを整理すると,

$$\begin{cases} v\neq\pm\dfrac{b}{a}u \\ \dfrac{u^2}{a^2}-\dfrac{v^2}{b^2}>-1 \\ u^2+v^2=b^2-a^2 \end{cases}$$

$\sqrt{b^2-a^2}<b$ であることに注意して図示すると下図のようになり，求める軌跡は,

円　$x^2+y^2=b^2-a^2$

$\left(\text{ただし,}y=\pm\dfrac{b}{a}\text{上にある 4 点を除く}\right)$



【7】

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$ の中心を O, 焦点の１つを F とし，双曲線上の点 $P(x_1,y_1)$ における接線が，２本の漸近線と交わる点を Q,R とする．

(1)$PQ=PR$ を示せ．

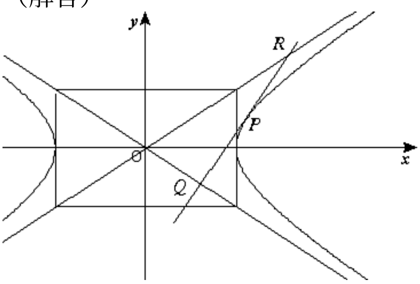
(2)$OQ\cdot OR=OF^2$ を示せ．

(3) 点 P から２本の漸近線に平行な線を引くとき，その２直線と漸近線とで囲まれる平行四辺形の面積を S とする．このとき，$\sin\theta$ を a と S とで表せ．ここで，θ は２本の漸近線のなす書くのうち小さいほうとする．

＜考え方＞

3 点が一直線上にあるので，PQ,PR の長さを直接求めなくても，RQ の中点が P であることを言えば，$PQ=PR$ が言える事になります．また，P における接線と漸近線の交点が必要になってきますが，２本の漸近線をまとめて表した式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ に代入すると，解と係数の関係が使えて直接 R,Q の x 座標を求める必要がなくなります．

（解答）



(1)$x_1=as, y_1=bt$ とおく．すると，$P(x_1,y_1)$ は双曲線上にあるから，$s^2-t^2=1$ がなりたつ．P における接線の方程式は，

$$\frac{as}{a^2}x-\frac{bt}{b^2}y=1$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{b}{t}\left(\frac{s}{a}x-1\right)$$

双曲線の漸近線の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ に代入して，

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b^2}{t^2}\left(\frac{s}{a}x-1\right)^2=0$$
$$t^2x^2-(s^2x^2-2asx+a^2)=0$$
$$-(s^2-t^2)x^2+2asx-a^2=0$$
$$x^2-2asx+a^2=0\cdots①$$

$R(x_R,y_R),Q(x_Q,y_Q)$ とおく．

① の 2 解は，点 R,Q の x 座標の値であることに注意して，解と係数の関係より，

$$x_R+x_Q=2as$$

線分 RQ の中点の座標は

$$\frac{x_R+x_Q}{2}=as$$

であり，これは点 P の x 座標の値に等しいから，点 P は線分 RQ の中点である．よって，$PQ=RP$ である．

(2)R を $y=\dfrac{b}{a}x$ との交点，Q を $y=-\dfrac{b}{a}x$ との交点とすると，

$$R\left(x_R,\tfrac{b}{a}x_R\right),\quad Q\left(x_Q,-\tfrac{b}{a}x_Q\right)$$

であり，

$$OQ\cdot OR=\sqrt{x_R^2+\tfrac{b^2}{a^2}x_R^2}\cdot\sqrt{x_Q^2+\tfrac{b^2}{a^2}x_Q^2}$$
$$=|x_Rx_Q|\left(1+\tfrac{b^2}{a^2}\right)$$

①で解と係数の関係を用いて，

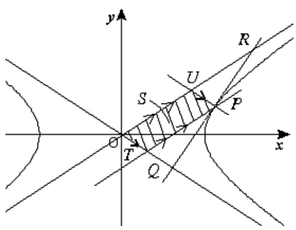
$$x_Rx_Q=a^2$$

であるから，

$$OQ\cdot OR=a^2+b^2$$

となり，$OF=\sqrt{a^2+b^2}$ なので，$OQ\cdot OR=OF^2$ である．

(3) 下図のように，文字 U,T をおく．



$\triangle OPT=\triangle PTQ$,
$\triangle OPU=\triangle RUP$ であるから，

$$S=\frac{1}{2}\triangle OQR$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}OQ\cdot OR\sin\theta$$
$$=\frac{1}{4}(a^2+b^2)\sin\theta$$

また，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{b}{a}$ であるから，

$$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\therefore S=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{1}{2}ab \qquad \therefore b=\frac{2S}{a}$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{2a\cdot\frac{2S}{a}}{a^2+\frac{4S^2}{a^2}}=\frac{4Sa^2}{a^4+4S^2}$$

補足

最後のところで，あえて sin を消去していますが，それは，sin が消去しやすかったからです．消しやすいものから消すというのは式をうまく操る方法の一つです．

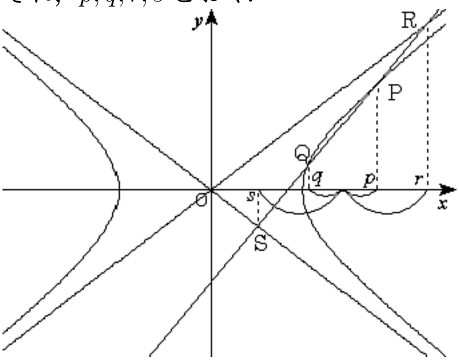
【8】

双曲線 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と直線 $\ell:y=mx+k$ が異なる 2 点 P,Q で交わっている．また，直線 ℓ が，双曲線 C の漸近線と交わる点を R,S とする．このとき，$PR=QS$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$a>0,\quad b>0,\quad k\neq 0$ とする．

＜考え方＞

P,Q,R,S は一直線上にあるから，P,Q,R,S の x 座標 p,q,r,s，または，y 座標のみを捉えるようにします．解と係数から，$p+q, r+s$ が出てくるので，座標そのものを直接求める必要はありません．

（解答）点 P，点 Q，点 R，点 S の x 座標をそれぞれ，p,q,r,s とおく．



$y=mx+k$ を，双曲線 C の式に代入して，

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{b^2}(mx+k)^2=1$$
$$b^2x^2-a^2(m^2x^2+2mkx+k^2)=a^2b^2$$
$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mkx-a^2(k^2+b^2)=0$$

この二次方程式の 2 つの解は直線 ℓ と双曲線 C の交点の x 座標の値であるから，p,q である．したがって，解と係数の関係より，

$$p+q=\frac{2a^2mk}{b^2-a^2m^2}\cdots①$$

が成り立つ．

また，$y=mx+k$ を双曲線 C の漸近線の式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ に代入して，整理して，

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mkx-a^2k^2=0$$

この二次方程式の 2 つの解は直線 ℓ と双曲線 C の漸近線の交点の x 座標の値であるから，r,s である．したがって，解と係数の関係より，

$$r+s=\frac{2a^2mk}{b^2-a^2m^2}\cdots②$$

が成り立つ．

① と ② より，

$$\frac{p+q}{2}=\frac{a^2mk}{b^2-a^2m^2}$$
$$\frac{r+s}{2}=\frac{a^2mk}{b^2-a^2m^2}$$

となり，両者は一致するから，線分 PQ と線分 RS の中点の x 座標は等しい．しかも，点 P，点 Q，点 R，点 S は直線 ℓ 上にあるので，結局のところ，線分 PQ と線分 RS の中点は同じであることがわかる．したがって，$PR=QS$ が成り立つ．

補足

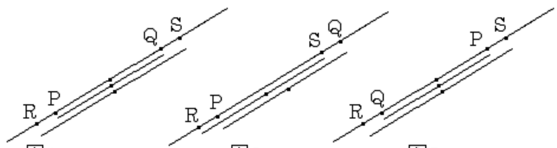


図1　図2　図3

線分 PQ と線分 RS の中点が一致すれば線分 PR と線分 QS の長さが一致することは，幾何的に明らかとしてよいでしょう（図１，図３）．ただし，線分 PQ と線分 RS の長さが一致していても，中点が一致するとは限りません．たとえば，図２では，線分 PR と線分 QS の長さは一致していますが，線分 RS の中点と線分 PQ の中点は一致していません．本問のように点 P, 点 Q が点 R, 点 S の内側（あるいはその逆）にあるときにのみ成り立ちます．

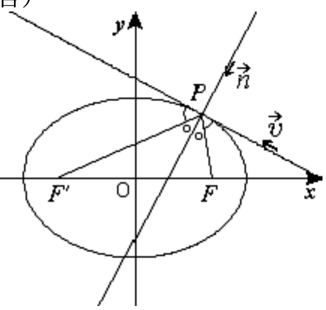
【9】

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$ の焦点を F, F' とすると，楕円上の任意の点 P に対して，$FP, F'P$ は P における楕円の接線と等角をなすことを証明せよ.

＜考え方＞

幾何的に示す方法もありますが，ここでは強引に計算で示してみることにします．$\angle F'PF$ の二等分線が点 P における垂線であれば，題意が示せたことになります．すなわち，接線方向のベクトルと，$\angle F'PF$ の二等分線が垂直であることを示せばよいことになります.

（解答）



$P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ とおくと，点 P における接線の方向ベクトル $\vec{v}$ は,

$\vec{v}=\left(\frac{d}{d\theta}(a\cos\theta), \frac{d}{d\theta}(b\sin\theta)\right)=(-a\sin\theta, b\cos\theta)$

さて，$F(\sqrt{a^2-b^2}, 0),\quad F'(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ とおく.

$\overrightarrow{PF}=(\sqrt{a^2-b^2}-a\cos\theta, -b\sin\theta)$ であるから,

$\left|\overrightarrow{PF}\right|^2=(\sqrt{a^2-b^2}-a\cos\theta)^2+b^2\sin^2\theta$

$=a^2-b^2+a^2\cos^2\theta-2a\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+b^2\sin^2\theta$

$=a^2-b^2+a^2\cos^2\theta$

$\qquad -2a\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+b^2(1-\cos^2\theta)$

$=(a^2-b^2)\cos^2\theta-2a\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+a^2$

$=(\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta-a)^2$

$a>\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta$ であるから,

$\left|\overrightarrow{PF}\right|=a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta$

また，同様にして,

$\overrightarrow{PF'}=(-\sqrt{a^2-b^2}-a\cos\theta, b\sin\theta)$ であるから,

$\left|\overrightarrow{PF'}\right|^2=(-\sqrt{a^2-b^2}-a\cos\theta)^2+b^2\sin^2\theta$

$=a^2-b^2+a^2\cos^2\theta+2a\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+b^2\sin^2\theta$

$=a^2-b^2+a^2\cos^2\theta$

$\qquad +2a\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+b^2(1-\cos^2\theta)$

$=(a^2-b^2)\cos^2\theta+2a\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+a^2$

$=(\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta+a)^2$

$\therefore\left|\overrightarrow{PF'}\right|=a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta$

$\angle F'PF$ の二等分線の方向ベクトル $\vec{n}$ は,

$$\vec{n}=\frac{\overrightarrow{PF'}}{\left|\overrightarrow{PF'}\right|}+\frac{\overrightarrow{PF}}{\left|\overrightarrow{PF}\right|}$$

であり，これと $\vec{v}$ が垂直であることを示せばよい.

$\overrightarrow{PF}\cdot\vec{v}=-a\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta+(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta$

$\overrightarrow{PF'}\cdot\vec{v}=a\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta+(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta$

であることに注意して,

$\vec{n}\cdot\vec{v}=\dfrac{\overrightarrow{PF'}\cdot\vec{v}}{\left|\overrightarrow{PF'}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{PF}\cdot\vec{v}}{\left|\overrightarrow{PF}\right|}$

$=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}(a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta)\sin\theta}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}$

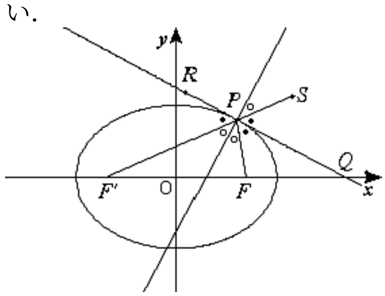
$\qquad -\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta)\sin\theta}{a-\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}$

$=\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta-\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta$

$=0$

よって，$\angle F'PF$ の二等分線と点 P における接線は直交している．よって，楕円上の任意の点 P に対して，$FP, F'P$ は P における楕円の接線と等角をなす.

（別解）対称性より，P は第一象限にあるとしてよい.



上図のように点 Q, R, S をとる．今，示すべきことは,

$\angle RPF'=\angle QPF\cdots$①

であるが，これが成り立つとき,

$\angle RPF'=\angle SPQ$ 　（対頂角）$\cdots$②

であるので,

$\angle SPQ=\angle QPF\cdots$③

となる．よって外角の二等分線の定理より,

$QF:QF'=PF:PF'\cdots$④

が成り立つ．つまり,

① $\Leftrightarrow$ ② $\Leftrightarrow$ ③ $\Leftrightarrow$ ④

であるので，結局，④ を示せばよいことがわかる.

$P(ap, bq)$ とおくと，点 P における接線の方程式は,

$$\frac{p}{a}x + \frac{q}{b}y = 1$$

$y = 0$ とおくことで，$Q\left(\dfrac{a}{p}, 0\right)$ となることがわかり,

$$QF = \frac{a}{p} - \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{p}(a - p\sqrt{a^2 - b^2})$$
$$QF' = \frac{a}{p} + \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{p}(a + p\sqrt{a^2 - b^2})$$

である．
さて，つぎに，PF，PF' を求めにかかる．楕円の場合，２つの焦点と楕円上の距離の和は長軸に等しいから,
$PF + PF' = 2a \cdots ⑤$
また,
$PF^2 - PF'^2$
$= \{(ap - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + b^2q^2\}$
$\qquad - \{(ap + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + b^2q^2\}$
$= -4ap\sqrt{a^2 - b^2}$
ゆえに,
$(PF + PF')(PF - PF') = -4ap\sqrt{a^2 - b^2}$
$\therefore PF - PF' = -2p\sqrt{a^2 - b^2} \cdots ⑥$
⑤, ⑥ より,

$$PF = a - p\sqrt{a^2 - b^2}$$
$$PF' = a + p\sqrt{a^2 - b^2}$$

となる．よって，$QF : QF' = PF : PF'$ が成立する．(証明おわり）

補足

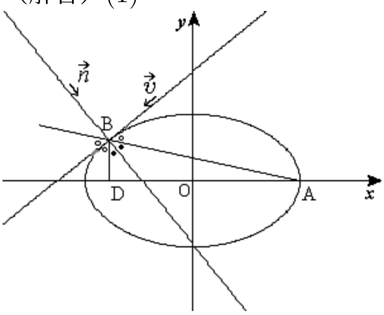
PF, PF' を求める際，独特なやり方な感じがしますが，果たして本番でこのようなやり方が思い浮かぶのか …．こんなやりかたもあるなぁ程度の記憶にとどめておくだけでよいかも知れません．

【１０】
楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$ 上に，点 $A(a, 0)$ をとる．C 上の点 $B(p, q) \quad (q > 0)$ における接線 ℓ と線分 BA のなす角が，ℓ と直線 $x = p$ のなす角に等しいとする．ただし 2 直線のなす角は鋭角の方をとることにする．
(1) 座標 p を a, b で表せ.
(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to b} p$ および，b を固定したときの，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{p}{a}$ を求めよ.

(98 東工大 改)

<考え方>
ベクトルを用いるならば，接線のベクトルと $\angle ABD$ の二等分線のベクトルが垂直であることを言えばよいのですが，計算が面倒なこと極まりないです.（解答）ではこちらを載せておきますが，外角の二等分線の定理を用いた方法の方がやや楽になるので（別解）でこちらも載せておきます.

（解答）(1)



$x = p$ と x 軸の交点を D とおき，
$p = a\cos\theta, \quad q = b\sin\theta$
とする.
すると，$A(a, 0), B(a\cos\theta, b\sin\theta), D(a\cos\theta, 0)$ である．ℓ の方向ベクトルを $\vec{v}$ とする.
$\vec{v} = \left(\frac{d}{d\theta}(a\cos\theta), \frac{d}{d\theta}(b\sin\theta)\right) = (-a\sin\theta, b\cos\theta)$
であり，$\angle ABD$ の二等分線の方向ベクトルを $\vec{n}$ とすると，
$\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|} + \dfrac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}$ となり，
$\overrightarrow{BD} = (0, -b\sin\theta), \quad \overrightarrow{BA} = (a(1-\cos\theta), -b\sin\theta)$
であるので，

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{(0, -b\sin\theta)}{b\sin\theta} = (0, -1)$$

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{(a(1-\cos\theta), -b\sin\theta)}{\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta}}$$

よって，

$$\frac{\overrightarrow{BD}\cdot\vec{v}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|} = -b\cos\theta$$

$$\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{v}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{-a^2(1-\cos\theta)\sin\theta - b^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta}}$$

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ であるので，

$$-b\cos\theta + \frac{-a^2(1-\cos\theta)\sin\theta - b^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta}} = 0$$

$$-b\cos\theta\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + b^2(1-\cos^2\theta)}$$
$$= a^2(1-\cos\theta)\sin\theta + b^2\sin\theta\cos\theta \cdots (*)$$

$$b^2\cos^2\theta\left\{a^2(1-\cos\theta)^2 + b^2(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\right\}$$
$$= \left\{a^2(1-\cos\theta) + b^2\cos\theta\right\}^2 \sin^2\theta$$

$$b^2\cos^2\theta\left\{a^2(1-\cos\theta)^2 + b^2(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\right\}$$
$$= \left\{a^2(1-\cos\theta) + b^2\cos\theta\right\}^2 (1+\cos\theta)(1-\cos\theta)$$

$$b^2\cos^2\theta\left\{a^2(1-\cos\theta) + b^2(1+\cos\theta)\right\}$$
$$= \left\{a^2(1-\cos\theta) + b^2\cos\theta\right\}^2 (1+\cos\theta)$$

$$a^2b^2\cos^2\theta(1-\cos\theta) + b^4\cos^2\theta(1+\cos\theta)$$
$$= a^4(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta) + b^4\cos^2\theta(1+\cos\theta)$$
$$+2a^2b^2\cos\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$$

$$a^2b^2\cos^2\theta(1-\cos\theta)$$
$$= a^4(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)$$
$$+2a^2b^2\cos\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$$

$$b^2\cos^2\theta$$
$$= a^2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) + 2b^2\cos\theta(1+\cos\theta)$$

$$b^2\cos^2\theta = a^2 - a^2\cos^2\theta + 2b^2\cos\theta + 2b^2\cos^2\theta$$

$$(a^2 - b^2)\cos^2\theta - 2b^2\cos\theta - a^2 = 0$$

ゆえに，

$$\cos\theta = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 + a^4 - a^2b^2}}{a^2 - b^2}$$

$(*)$ で，$\cos\theta > 0$ とすると，左辺 < 0，右辺 > 0 となってしまい不適．よって，$\cos\theta < 0$ であるから，$a > b$ に注意して，

$$\cos\theta = \frac{b^2 - \sqrt{b^4 + a^4 - a^2b^2}}{a^2 - b^2}$$

$$\therefore p = a\cos\theta = \frac{a(b^2 - \sqrt{b^4 + a^4 - a^2b^2})}{a^2 - b^2}$$

(2)

$$p=\frac{a(b^2-\sqrt{b^4+a^4-a^2b^2})}{a^2-b^2}$$
$$=\frac{a\{b^4-(b^4+a^4-a^2b^2)\}}{(a^2-b^2)(b^2+\sqrt{b^4+a^4-a^2b^2})}$$
$$=\frac{-a^3(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(b^2+\sqrt{b^4+a^4-a^2b^2})}$$
$$=\frac{-a^3}{b^2+\sqrt{b^4+a^4-a^2b^2}}$$

よって，$a\to b$ のとき，

$$p\to\frac{-b^3}{b^2+\sqrt{b^4+b^4-b^4}}=-\frac{b}{2}$$

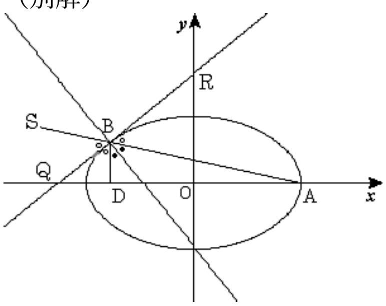
また，

$$\frac{p}{a}=\frac{-a^2}{b^2+\sqrt{b^4+a^4-a^2b^2}}$$
$$=\frac{-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^4+1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

よって，$a\to\infty$ のとき，

$$\frac{p}{a}\to-1$$

（別解）



ℓ と x 軸との交点 Q，y 軸との交点を R とし，図のように直線 AB 上に S をとり，$x=p$ と x 軸の交点を D とする．題意より，

$$\angle ABR=\angle QBD$$

であるが，

$$\angle ABR=\angle SBQ \quad （対頂角）$$

であるので，

$$\angle QBD=\angle SBQ$$

となる．従って，外角の二等分線の定理より，

$$BD:BA=QD:QA\cdots①$$

が成り立つ．

今，$A(a,0)$ であり，$B(as,bt)$ とおくと，$D(as,0)$ となる．また，図による考察を行うと，$p>0$ では，$\angle ABR=\angle QBD$ とはなり得ないので，$p<0$ であり，従って，$s<0$ である．

点 B における接線の方程式は，

$$\frac{s}{a}x+\frac{t}{b}y=1$$

であり，$y=0$ として，$Q\left(\frac{a}{s},0\right)$ となる．

$$\therefore QD:QA=\left(as-\frac{a}{s}\right):\left(a-\frac{a}{s}\right)=(s+1):1$$

① より，

$$bt:\sqrt{(a-as)^2+b^2t^2}=(s+1):1$$
$$(s+1)^2\{a^2(1-s)^2+b^2t^2\}=b^2t^2$$

$s^2+t^2=1$ であるから，

$$(s+1)^2\left\{a^2(1-s)^2+b^2(1-s^2)\right\}=b^2(1-s^2)$$
$$(s+1)^2(1-s)\{a^2(1-s)+b^2(1+s)\}=b^2(1+s)(1-s)$$
$$(s+1)\{a^2(1-s)+b^2(1+s)\}=b^2$$
$$a^2(1-s^2)+b^2(1+s)^2=b^2$$
$$-a^2s^2+a^2+b^2+2b^2s+b^2s^2=b^2$$
$$(a^2-b^2)s^2-2b^2s-a^2=0$$
$$\therefore s=\frac{b^2\pm\sqrt{b^4+a^4-a^2b^2}}{a^2-b^2}$$

$s<0$ より，$s=\dfrac{b^2-\sqrt{b^4+a^4-a^2b^2}}{a^2-b^2}$

$$\therefore p=\frac{a(b^2-\sqrt{b^4+a^4-a^2b^2})}{a^2-b^2}$$

(2) は（解答）と同じ．

補足

計算が非常にしんどい問題でした．（解答）の後半部分の計算では，消せるところから順次消してゆき，$\cos\theta$ が求めたいので，$\sin\theta$ も $\cos\theta$ に直しひたすら式変形していきました．（別解）も同じで，s を求めたいので，t を消去したのですが，$s^2=1-t^2$ であるにもかかわらず，s の 1 次の項もあるのでさすがに s を消去しようとは思わないでしょう．

【１１】

楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点 P における C の法線が，P 以外で C と交わる点を Q とする．点 P が C 上を時計回りに点 $(0,1)$ から点 $(\sqrt{3},0)$ まで動くとき，点 Q は C 上をどのように動くか．

(01 弘前大)

＜考え方＞

点 P での法線と C の方程式を連立させて，Q の x 座標を求め，微分して増減を調べます．

（解答）$P(\sqrt{3}p,q)$ とおくと，

$$p^2+q^2=1\cdots(*)$$

が成り立つ．点 P における C の接線 ℓ は，

$$\ell:\frac{\sqrt{3}p}{3}x+qy=1$$

従って，ℓ は，

$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}p,q\right)$ に垂直である．$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}p,q\right)$ に垂直なベクトルの一つは $\left(-q,\frac{\sqrt{3}}{3}p\right)$ であり，このベクトルは ℓ に平行であり，点 P における法線 m に垂直である．従って，m をあらわす方程式は，

$$-q(x-\sqrt{3}p)+\frac{\sqrt{3}}{3}p(y-q)=0$$

$$\Leftrightarrow py=\sqrt{3}qx-2pq\cdots①$$

C の方程式より，

$$p^2x^2+3p^2y^2=3p^2$$

であるから①を代入して，

$$p^2x^2+3(\sqrt{3}qx-2pq)^2=3p^2$$

$$\Leftrightarrow p^2x^2+3(3q^2x^2+4p^2q^2-4\sqrt{3}pq^2x)=3p^2$$

$(*)$ を代入して，

$$p^2x^2+9(1-p^2)x^2+12p^2(1-p^2)-12\sqrt{3}p(1-p^2)x=3p^2$$

$$(9-8p^2)x^2-12\sqrt{3}p(1-p^2)x+(9-12p^2)p^2=0$$

$$(x-\sqrt{3}p)\{(9-8p^2)x-\sqrt{3}(3-4p^2)p\}=0$$

今，$(*)$ より，$0\leqq p^2\leqq 1$ であるから，$p^2\neq\dfrac{9}{8}$

$\therefore Q$ の x 座標は，

$$\frac{\sqrt{3}(3-4p^2)p}{9-8p^2}=\frac{\sqrt{3}(-4p^3+3p)}{9-8p^2}$$

$f(p)=\dfrac{\sqrt{3}(-4p^3+3p)}{9-8p^2}$ とおく．

$$f'(p)=\frac{\sqrt{3}\{(-12p^2+3)(9-8p^2)-(-4p^3+3p)(-16p)\}}{(9-8p^2)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(32p^4-84p^2+27)}{(9-8p^2)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(4p^2-9)(8p^2-3)}{(9-8p^2)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(2p+3)(2p-3)(8p^2-3)}{(9-8p^2)^2}$$

$f'(p)=0$ とおくと，$0<p<1$ より，

$$p=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

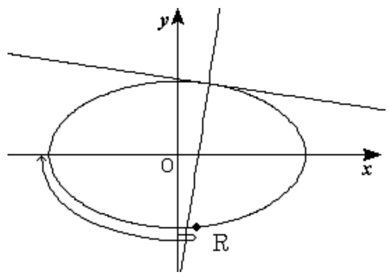
従って，$f(p)$ の増減表は次のようになる．

p	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$		$-$	
$f(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{16}$$

$$f(1)=-\sqrt{3}$$

であるから，点 Q は，$(0,-1)$ から動き出し，C 上を $R\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{16},\dfrac{5\sqrt{10}}{16}\right)$ まで x 軸の正の向きに動くが，その後は，x 軸負の向きに，$(-\sqrt{3},0)$ まで C 上を動いてゆく．



【１２】

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$ 上の点 $P(a\cos\theta, b\sin\theta) \quad \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における法線と楕円の P 以外の交点を $Q(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ とする．

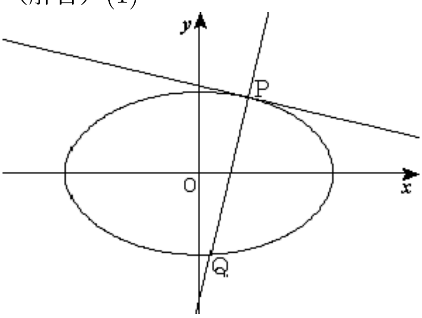
(1)$\tan\theta\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}$ の値は一定であることを示せ．また，$t=\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}$, $u=\tan\theta$ とおくとき，t を a,b,u だけで表し，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くときの $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ．ただし O は原点である．

＜考え方＞

$a\cos\theta, b\sin\theta$ を用いて点 P における法線を出し，楕円の式と連立してなんとかして Q の座標を求めてやろうと思わないことです．

（解答）(1)



点 P における楕円の接線の方程式は，

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

よって，傾きは，$-\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}=-\dfrac{b}{a\tan\theta}$

また，直線 PQ の傾きは，

$$\frac{b\sin\theta-b\sin\alpha}{a\cos\theta-a\sin\alpha}=\frac{b(\sin\theta-\sin\alpha)}{a(\cos\theta-\sin\alpha)}$$

従って，

$$-\frac{b}{a\tan\theta}\cdot\frac{b(\sin\theta-\sin\alpha)}{a(\cos\theta-\sin\alpha)}=-1$$

$$\tan\theta\frac{\sin\theta-\sin\alpha}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\tan\theta\frac{-2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}{2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}}=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore \tan\theta\tan\frac{\theta+\alpha}{2}=-\frac{b^2}{a^2}=\text{一定}$$

また，

$$\tan\frac{\theta-\alpha}{2}=\tan\left(\theta-\frac{\theta+\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\theta+\alpha}{2}}{1+\tan\theta\tan\frac{\theta+\alpha}{2}}$$

$$=\frac{u-\left(-\frac{b^2}{a^2u}\right)}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2u^2+b^2}{a^2u-b^2u}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\left(a^2u+\frac{b^2}{u}\right)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\tan\theta=u>0$ であるから，

$$\tan\frac{\theta-\alpha}{2}\geqq\frac{2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2u\cdot\frac{b^2}{u}}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

$$\therefore t\geqq\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

(2)$\triangle OPQ=S$ とおく．

$$S=\frac{1}{2}(a\cos\alpha\cdot b\sin\theta-a\cos\theta\cdot b\sin\alpha)$$

$$=\frac{ab}{2}\sin(\theta-\alpha)$$

$\theta-\alpha=\phi$ とおくと，

$S=\dfrac{ab}{2}\sin\phi$，$\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}=\tan\dfrac{\phi}{2}$

となり，$\tan\dfrac{\phi}{2}=t$ とおくと，$\sin\phi=\dfrac{2t}{1+t^2}$ であるから，

$$S=\frac{ab}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}=ab\frac{t}{1+t^2}=ab\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$$

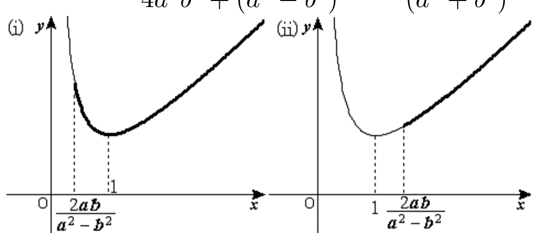
$t\geqq\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ だから，

(i)$\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\geqq 1$ のとき S の最大値は $\quad S=\dfrac{ab}{2}$

(ii)$\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\leqq 1$ のとき S の最大値は

$$S=ab\frac{1}{\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{a^2-b^2}{2ab}}$$

$$=ab\frac{2ab(a^2-b^2)}{4a^2b^2+(a^2-b^2)^2}=\frac{2ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$$

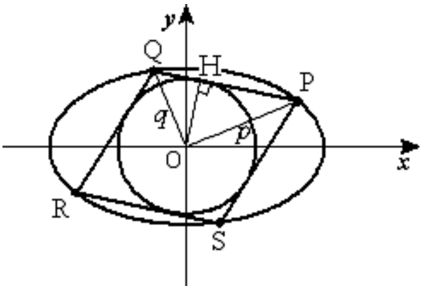


【１３】
円 $x^2+y^2=1$ を C_0, 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0, b>0)$ を C_1 とする．C_1 上のどんな点 P に対しても，P を頂点に持ち，C_0 に外接して C_1 に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を求めよ．

(90 東大)

<考え方>
まず，円に外接する平行四辺形はどのような図形かに気づき，それを考慮したうえで，楕円上の点をどのように表示するかが一つのポイントです．

（解答）



円に外接する平行四辺形は円の中心を中心とするひし形である．したがって，ひし形の隣り合う頂点を P, Q とし，$OP=p, OQ=q$ とおくと，線分 OP と x 軸のなす鋭角 θ を用いて，
$P(p\cos\theta, p\sin\theta)$
$Q\left(q\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right), q\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$
と表せる．
これらが楕円 C_1 上にあるから，

$$\begin{cases} \dfrac{p^2\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{q^2\sin^2\theta}{b^2}=1 \\ \dfrac{p^2\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{q^2\cos^2\theta}{b^2}=1 \end{cases} \cdots ①$$

が成り立ち，図のように文字をおくと，

$$OH=OP\cdot\frac{OQ}{PQ}=\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

ひし形が円 C_0 に外接する条件は，$OH=1$ であるから，

$$\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}}=1 \quad \text{すなわち，} \quad \frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}=1\cdots②$$

ここで，①より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2} \\ \dfrac{1}{q^2}=\dfrac{\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{b^2} \end{cases}$$

であるから，②に代入して，

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

が求める必要十分条件である．