ちょっと一癖あるような最大値，最小値問題を集めてみました。一癖あるといっても、基本は、与えられた条件を過不足なく式で表して、求めたい値について解いて、あとは、その形を見て微分するなり、平方完成するなりするだけです。答は載せておきましたが、解答は来年の３月以降になると思われます。暇な方は是非どうぞ。

平面上の点 O を中心とする半径１の円周上に点 P をとり、円の内部または周上に２点 Q,R を△PQR が１辺の長さ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形になるようにとる。このとき, OQ^2+OR^2 の最大値および最小値を求めよ。

(東大)

（答）$\dfrac{8-2\sqrt{6}}{3}$

正四角錐 V に内接する球 S とする。V をいろいろ変えるとき，比

$$R=\frac{S\text{ の表面積}}{V\text{ の表面積}}$$

のとりうる値のうち，最大のものを求めよ。

ここで，正四角錐とは，底面が正方形で，底面の中心とする頂点を結ぶ直線が底面に垂直であるような角錐のこととする。

(東大 1983)

（答）$\dfrac{\pi}{8}$

AB=AC=5, BC=6 なる三角形の紙片 ABC がある。辺 BC 上に２点 P，Q を BP=QC（BP <3）となるようにとり、線分 AP，AQ を折り目としてまげ，辺 AB，AC を張り合わせて三角錐状の容器を作る。

この容器の容積 V が最大となるときの PQ の長さを求めよ。

(名大)

（答）$4\sqrt{6}-8$

p,q を正の実数とする。点 $\mathrm{P}\left(p,\dfrac{1}{p}\right)$ を中心とし x 軸に接する円 C_p と，点 $\mathrm{Q}\left(q,\dfrac{1}{q}\right)$ を中心とし x 軸に接する円 C_q が外接している。C_p と C_q の接点を R とする。

(1) 点 R の y 座標は $\dfrac{2}{p+q}$ であることを示せ。

(2) 点 R の y 座標の最大値を求めよ。

（答）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2つの半直線OX,OYをとり，OY上の点PからOXに下ろした垂線の足をQとする。Pを通りOXに平行な直線状に点Sを，線分OSと線分PQが交わるようにとり，OSとPQの交点をRとする。
線分OPの長さが1，線分RSの長さが2を保ちながら，∠XOYを鋭角の範囲で変化させたときの，線分QRの長さの最大値を求めよ。

（答）$\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

xy平面上の楕円

$$C_1 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

を，原点のまわりに反時計まわりに回転して得られる楕円をC_2とする。ただし，回転角は鋭角とする。
C_1とC_2の第1象限における交点をPとし，PにおけるC_1とC_2の接線を，それぞれl_1, l_2とする。l_1とl_2のなす鋭角θの最大値をθ_0とするとき，$tan\theta_0$の値を求めよ。

（答）$\dfrac{24}{7}$

xy平面上の原点Oと第1象限にある点Pを結ぶ線分OPの垂直二等分線とx軸, y軸によって囲まれる三角形の面積が$\sqrt{3}$であるとき，点Pのx座標の最大値を求めよ。

（答）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$