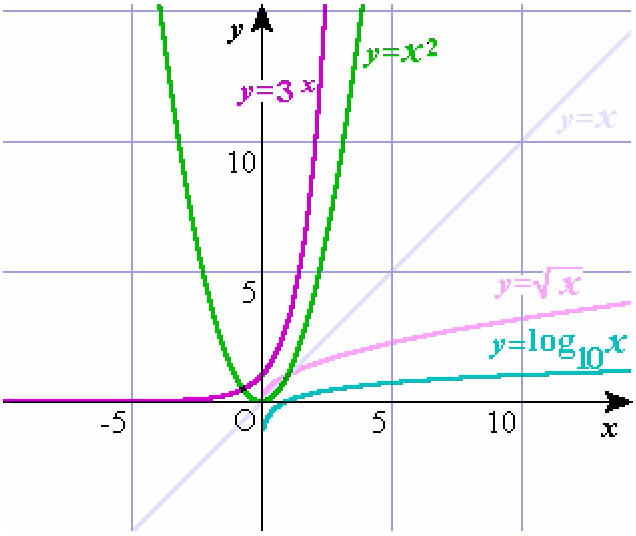
$\boxed{\dfrac{2^x}{x}\text{の極限}}$

これはぱっと見て、答えはすぐに分かりますね。∞であることは分かると思います。なぜかといいますと、2^xとxでは圧倒的に2^xの方が速く無限大に飛ぶからです。右のグラフを見ると良く分かると思います。グラフでは2^xではなく3^xになっていますが、いずれにせよ、xなんかよりは、はやく無限大に飛ぶことがわかります。したがって$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x}=\infty$であることがわかります。しかし、こんな文章的な説明では解答に書くことはできません。(全くのバツにはならないとは思いますが。。あまりはっきりとしたことは言えません。しかし、このような説明で解答が書いてあるものをみたことはないので。。)



ではどうすれば良いかというと、要は、$2^x \geqq 2$次式であることを言えばいいのです。つまり、仮に、$2^x=ax^2+bx+c$の2次式だったとしましょう。

そうすると$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(ax+b+\frac{c}{x}\right)=\infty$、と言えるわけです。

ではどうすれば$2^x \geqq 2$次式を言えるかというと、二項定理を用いるのです。

二項定理とは

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots{}_nC_{n-1}a^nb^{n-1}+{}_nC_nb^n$$

というものです。二項定理と言うと、嫌だなぁと思う方もいらっしゃるかもしれませんが、要は一般項である${}_nC_ra^{n-r}b^r$を覚えるだけで、あとは、rに0から入れていけばいいだけのことだすから、公式を覚えるにあたっては難しくないと思います。今回は、aとbに1を入れます。したがって、

$(1+1)^x={}_xC_0+{}_xC_1+{}_xC_2+\cdots\cdots{}_xC_{x-1}+{}_xC_x$となります。

ここで、$2^x \geqq 2$次式になるにはどうすれば良いかと言うと、${}_xC_2$のところ

で切ります。なぜかと言いますと、${}_xC_2=\dfrac{x(x-1)}{2}$ となりますので、x の2次式になるわけです。ですから、

$(1+1)^x>{}_xC_0+{}_xC_1+{}_xC_2$　ということになります。さらにもっと言うと、

$2^x>{}_xC_2=\dfrac{x(x-1)}{2}$ と言うことになります。ここで両辺を $x\,(>0)$(注)で割ると、

$$\frac{2^x}{x}>\frac{x(x-1)}{2x}=\frac{x-1}{2}$$

もちろん、$2^x>1+x+\dfrac{x(x-1)}{2}$ から、

$\dfrac{2^x}{x}>\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{(x-1)}{2}$ とやってもかまわない。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{2}=\infty$ なので、当然、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x}=\infty$ も言えるということになります。

このことは別に 2^x だけでなく、3や4といったものでも同じことです。

一般化して、$(1+h)^x$　とすると、(h>0)

$(1+h)^x>{}_xC_2h^2=\dfrac{x(x-1)}{2}h^2$ から、同様に、$\dfrac{(1+h)^x}{x}>\dfrac{x(x-1)}{2x}h^2$ から同じことが言えます。

(注)　$x>0$ で割る理由について
問題文には 、$x>0$　という条件はついていません。本来なら、$x>0$ と $x<0$ で場合わけすべきところです。(負の数で割ると不等号の向きが逆になる。)
ではなぜ $x>0$ だけで考えているかというと、$x\to\infty$だからです。つまり、無限大に飛ばすということは、正の部分で考えればよいということです。だから、$x<0$ のことは考えずに $x>0$ で割れば良いのです。

$\boxed{\dfrac{2^x}{x^2}\text{の極限}}$

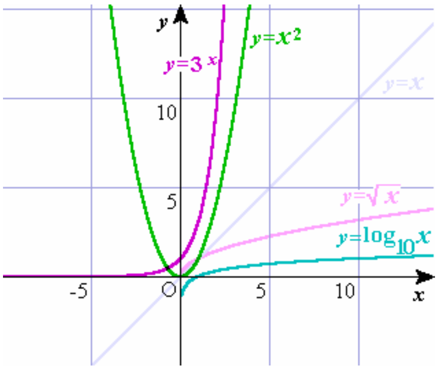
これも $\dfrac{2^x}{x}$ と同じように考えますが、分子が2乗なので、${}_xC_2$ ではなく、${}_xC_3$ で切ることになります。したがって、

$2^x>{}_xC_3=\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}$ となります。

両辺を $x^2\,(>0)$ で割って、$\dfrac{2^x}{x^2}>\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6x^2}$

故に、$\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-1)(x-2)}{6x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)}{6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3+\frac{2}{x}}{6}=\infty$ なので、$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^2}=\infty$

$\boxed{x\to\infty \text{ のときの強弱(無限大に飛ぶはやさ)}}$



グラフより、無限大に飛ぶはやさは、次の関係がなりたちます。これは、極限を求める際、参考になりますし、マークなんかではこれを使うとすぐに解けるかと思います。

$\log x < \cdots < \sqrt{x} < x < x^2 < \cdots < 2^x < 3^x < \cdots < x!$

(間違っていたら、掲示板にお知らせください。)